Mehrdimensionale Differentiation und Integration • WS 17/18

Übungsblatt 4

Zur Bearbeitung in der Übung am 13.11.2017

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Vorlesung: Dr. Daniel Habeck
Übungen: David Willems

Download von Übungsblättern, Zusatzmaterial etc.: `http://uni-ko-ld.de/k7`

Aufgabe 4.1

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$. Weiter bezeichne $d \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\|d\|=1} \langle \nabla f(x), d \rangle. \tag{SD}$$

Zeigen Sie, dass das Problem (SD) die eindeutige Lösung

$$d = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$$

besitzt[1].

Aufgabe 4.2

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existieren und berechnen Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass f total differenzierbar in $(0,0)$ ist.

Aufgabe 4.3

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist.

b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht stetig partiell differenzierbar ist.

[1] Die Aussage ist nur richtig für die Norm $\|x\| = \sqrt{x^\top x}$. Wählt man in (SD) eine andere Norm, so ergibt sich eine andere Richtung des steilsten Abstiegs.

Aufgabe 4.4

Berechnen Sie für die Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) &:= \left(\sin(x_1)x_2^2 - 5x_3^2, \quad x_1^2 e^{x_2} + x_3\right) \\ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad g(x_1, x_2) &:= \left(3x_1 + x_2^2, \quad e^{x_1} x_2\right) \end{aligned}$$

die Jacobimatrix $\mathcal{J}_{g\circ f}(x_1, x_2, x_3)$ der Verkettung $g \circ f$.

Hausübungen

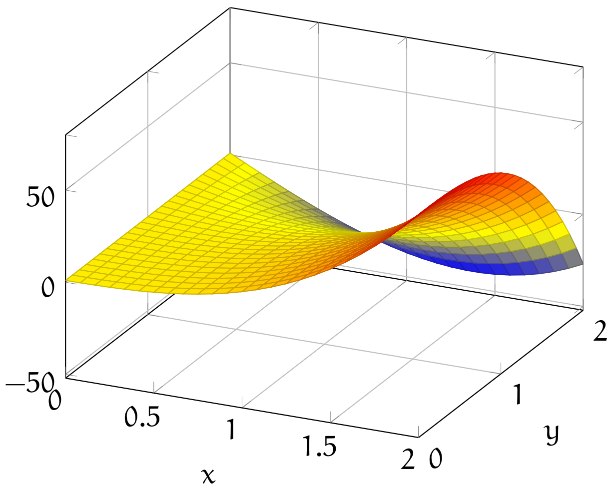
Aufgabe 4.5

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^y$. Berechnen Sie den Wert von $1.02^{3.01}$ ohne Einsatz eines Rechners durch lineare Approximation der Funktion f im Punkt $(1, 3)$.

Aufgabe 4.6

Sie befinden sich in den Bergen. Das Höhenprofil ihrer näheren Umgebung lässt sich durch die Gleichung $z(x, y) = 3x^2 - 6xy^3 + 7x^3 + 1$ beschreiben, wobei z die Höhe für jeden Punkt angibt. Sie befinden sich am Ort $P = (1, 1)$, der die Höhe 5 aufweist. In welche Richtung müssen Sie laufen, um möglichst schnell an Höhe zu gewinnen? Wie groß ist der Anstiegswinkel α?

$z(x, y) = 3x^2 - 6xy^3 + 7x^3 + 1$



Aufgabe 4.7

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar ist.